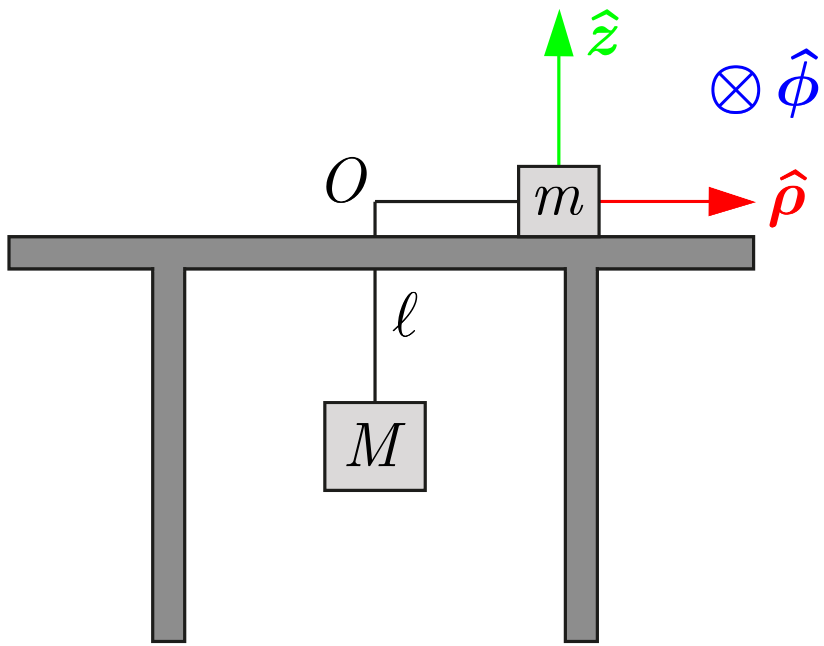
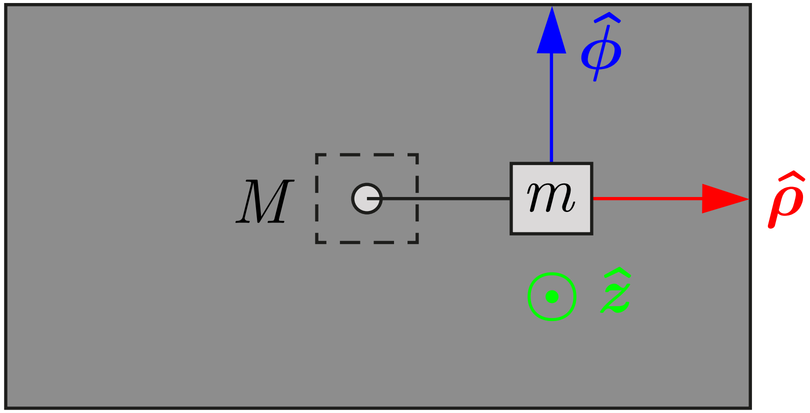
# Applications - Chapitre 9

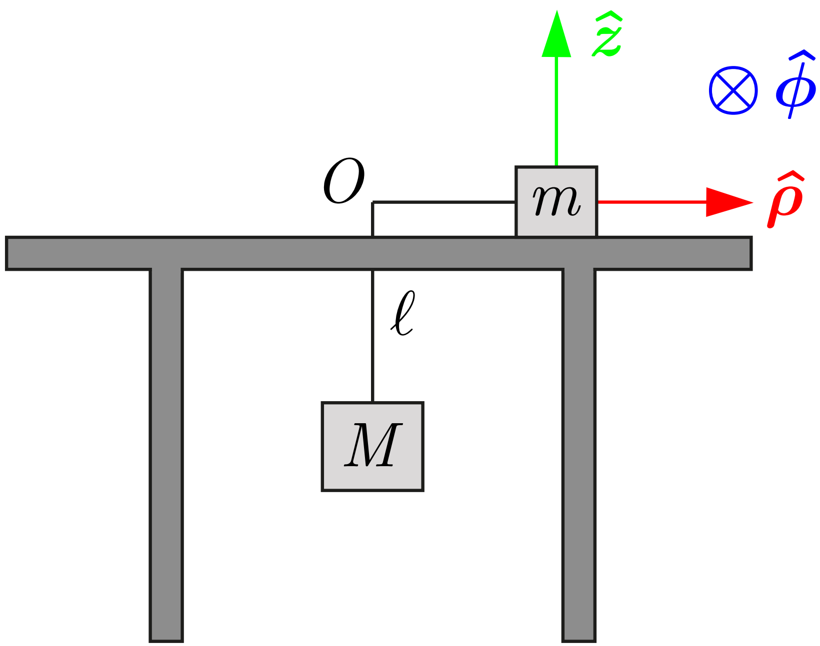
## Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

EPFL




- Une table horizontale est percée d'un trou. Une masse $m$ glisse sans frottement sur la table. Elle est attachée à un fil de masse négligeable qui coulisse sans frottement à travers le trou. Un contrepoids de masse $M$ est attaché à l'autre extrémité du fil de longueur $\ell$.




1. Masse $m$ :
   - Energie cinétique :

$$T_m = \frac{1}{2}\,m\,v_m^2 = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) \tag{A.9.1}$$

   - Energie potentielle : (réf. table)

$$V_m = 0 \tag{A.9.2}$$

2. Masse $M$ :
   - Energie cinétique :

$$T_M = \frac{1}{2}\,M\,v_M^2 = \frac{1}{2}\,M\,\dot{z}^2 \tag{A.9.3}$$

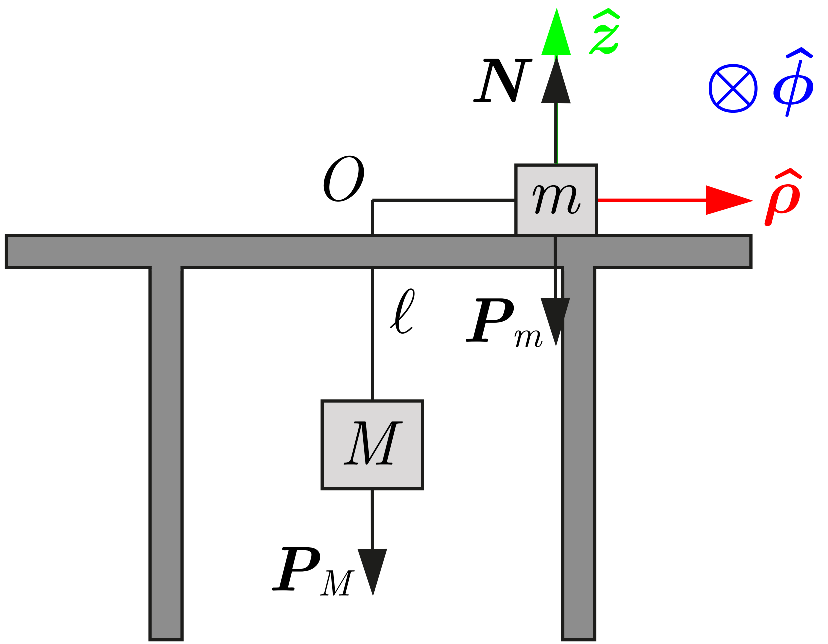
   - Energie potentielle : (réf. table)

$$V_M = Mgz \qquad \text{où} \qquad z < 0 \tag{A.9.4}$$

- Longueur du fil : $(z < 0)$

$$\ell = \rho - z = \text{cste} \qquad (A.9.5)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z} = \dot{\rho} \qquad (A.9.6)$$




- Energie mécanique :

$$E = E_m + E_M = T_m + \underbrace{V_m}_{=0} + T_M + V_M$$

$$= \frac{1}{2}\, m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}\, M\, \dot{z}^2 + M g z$$

$$= \frac{1}{2}\, m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}\, M\, \dot{\rho}^2 + M g \left(\rho - \ell\right) \qquad (A.9.7)$$

- Moment cinétique évalué en $O$ :

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_{O,m} + \boldsymbol{L}_{O,M} = \boldsymbol{r}_m \times m\, \boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{r}_M \times M\, \boldsymbol{v}_M$$

$$= \rho\, \hat{\boldsymbol{\rho}} \times m \left(\cancel{\dot{\rho}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}} + \rho \dot{\phi}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right) + \cancel{z\, \hat{\boldsymbol{z}} \times M\, \dot{z}\, \hat{\boldsymbol{z}}} = m \rho^2 \dot{\phi}\, \hat{\boldsymbol{z}} \qquad (A.9.8)$$

EPFL

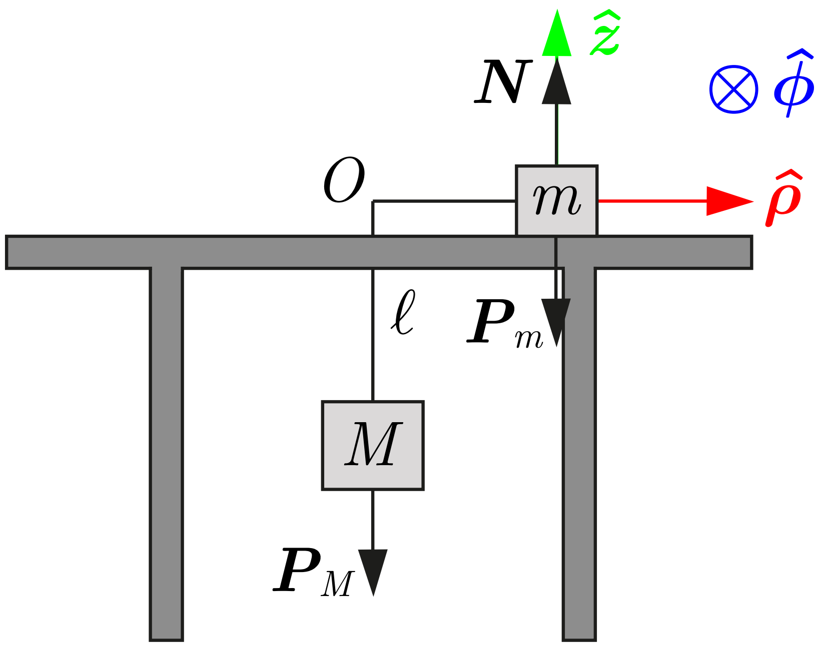
- Mouvement plan : (masse $m$)

$$\boldsymbol{P}_m + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad (A.9.9)$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_O \qquad (A.9.10)$$

$$\cancel{\boldsymbol{r}_m \times \boldsymbol{P}_m} + \cancel{\boldsymbol{r}_m \times \boldsymbol{N}} + \underbrace{\boldsymbol{r}_M \times \boldsymbol{P}_M}_{=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$$




$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{L}_O = \mathbf{cste} \quad \Rightarrow \quad L \equiv m\rho^2\dot{\phi} = \text{cste} \qquad (A.9.11)$$

- Energie mécanique : $\dot{\phi}^2 = \dfrac{L^2}{m^2\rho^4}$

$$E = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{m^2\rho^2}\right) + \frac{1}{2}\,M\,\dot{\rho}^2 + Mg\,(\rho - \ell) \qquad (A.9.12)$$

# A.9.1 Table à trou

- Energie mécanique :

$$E = \frac{1}{2}\,(M+m)\,\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,\rho^2} + M g\,(\rho - \ell) \qquad (A.9.13)$$

- Le premier terme est l'énergie cinétique radiale, le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation et le dernier est l'énergie potentielle gravitationnelle.
- Conservation de l'énergie : $E = \text{cste}$

$$\dot{E} = (M+m)\,\ddot{\rho}\,\dot{\rho} - \frac{L^2}{m\,\rho^3}\,\dot{\rho} + M g\,\dot{\rho} = 0 \qquad (A.9.14)$$

- Equation du mouvement :

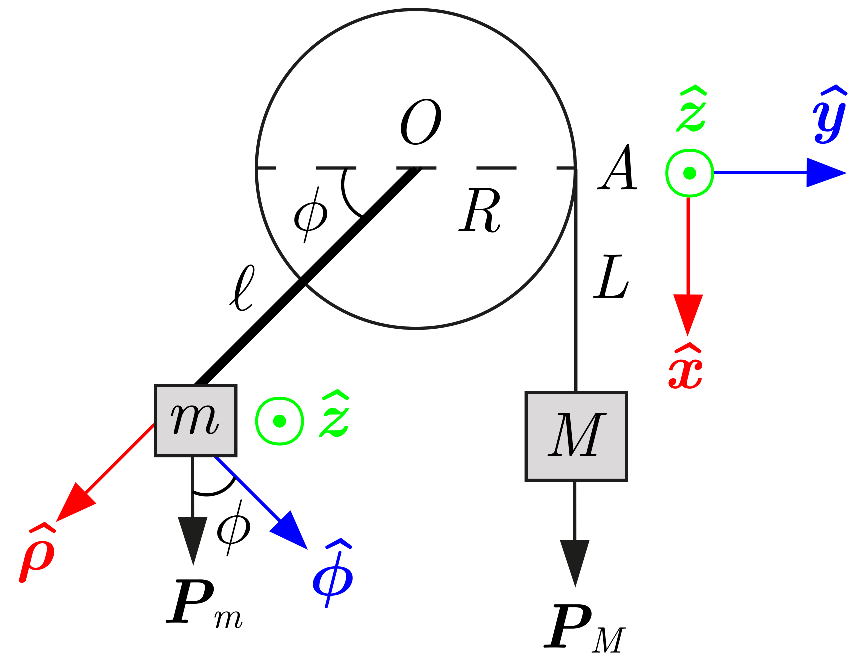
$$\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\,(M+m)\,\rho^3} + \frac{M}{M+m}\,g = 0 \qquad (A.9.15)$$

- Mouvement circulaire uniforme :

$$\rho = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{L^2}{M\,m\,g}} \qquad (A.9.16)$$

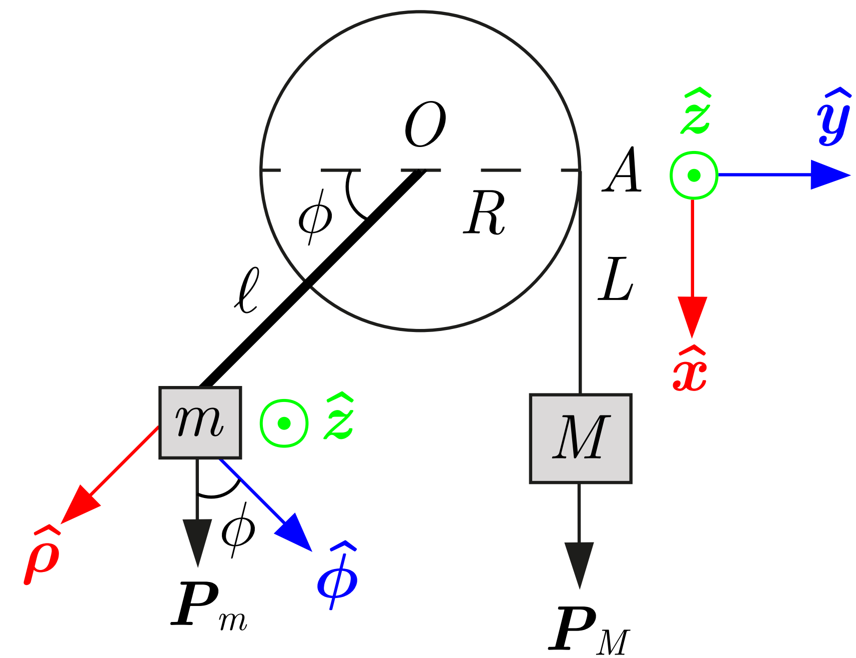
- Un disque de rayon $R$ et de masse négligeable tourne verticalement autour de son centre $O$. Une barre de longueur $\ell$ et de masse négligeable est fixée sur le disque. Une masse $m$ se trouve à l'extrémité de la barre.

- Un contrepoids de masse $M$ est attaché à un fil de masse négligeable enroulé autour du disque. Le système est à l'équilibre.




- D'après le théorème du moment cinétique, à l'équilibre, la somme des moments de forces extérieures s'annule. Par conséquent, à l'équilibre, la somme vectorielle des moments de force dus aux poids $\boldsymbol{P}_m$ et $\boldsymbol{P}_M$ s'annule.

## A.9.2 Equilibre en rotation




- Théorème du moment cinétique :

$$\sum \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \boldsymbol{0} \qquad (A.9.17)$$

- Equilibre en rotation : $(A.9.18)$

$$\boldsymbol{r}_m \times \boldsymbol{P}_m + \boldsymbol{r}_M \times \boldsymbol{P}_M = \boldsymbol{0}$$

- Moments de force :

1. $$\boldsymbol{r}_m \times \boldsymbol{P}_m = \ell\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \times mg\left(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \cancel{\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}}\right) = mg\ell\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (A.9.19)$$

2. $$\boldsymbol{r}_M \times \boldsymbol{P}_M = (R\,\hat{\boldsymbol{y}} + \cancel{L\,\hat{\boldsymbol{x}}}) \times Mg\,\hat{\boldsymbol{x}} = -\,MgR\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (A.9.20)$$

- Equilibre en rotation : $(\phi \equiv \phi_0)$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{z}} : \quad mg\ell\cos\phi_0 - MgR = 0 \qquad (A.9.21)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi_0 = \frac{MR}{m\ell} > 0 \qquad (A.9.22)$$

- Condition d'équilibre : mathématique

$$\cos\phi_0 = \frac{MR}{m\ell} \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad \ell \geqslant \frac{MR}{m} \tag{A.9.23}$$

- Interprétation physique :

  Pour un disque de rayon $R$ donné et des masses $M$ et $m$ fixées, la barre doit être assez longue pour que l'équilibre existe.

- Angles d'équilibre :

$$\phi_0 = \pm\arccos\left(\frac{MR}{m\ell}\right) \tag{A.9.24}$$

  Il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite horizontale qui passe par le centre $O$ du cercle.

- Pour déterminer la stabilité de ces positions d'équilibre, on choisit comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle cette droite horizontale passant par le point $O$.

- Energie potentielle : longueur du fil : $L = L_O - R\phi$

$$V = -\,mg\ell\sin\phi - Mg\,(L_O - R\phi) \tag{A.9.24}$$

- Positions d'équilibre :

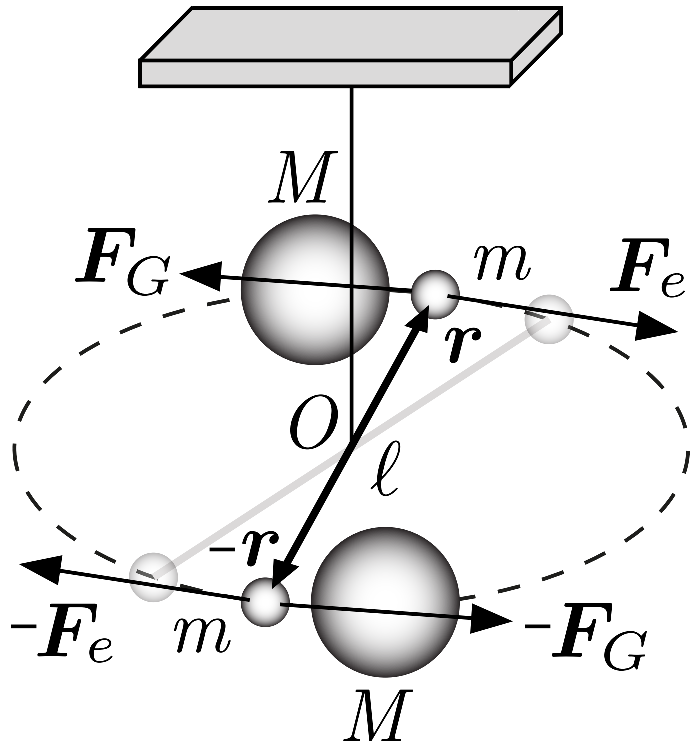
$$\left.\frac{dV}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = -\,mg\ell\cos\phi_0 + MgR = 0 \tag{A.9.25}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi_0 = \frac{MR}{m\ell} > 0 \tag{A.9.26}$$

- Stabilité des positions d'équilibre : $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = mg\ell\sin\phi_0 \tag{A.9.27}$$

1. Si $\phi_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\phi_0 > 0 \quad \Rightarrow$ équilibre stable (dessous)
2. Si $\phi_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\phi_0 < 0 \quad \Rightarrow$ équilibre instable (dessus)




- Deux petites masses identiques $m$ sont montées sur une tige horizontale de longueur $\ell$ et de masse négligeable attachée en son centre $O$ à un fil vertical. Deux grandes masses identiques $M$ sont fixées de manière symétrique à proximité des petites masses dans le plan horizontal.

- Le couple de forces gravitationnelles $\boldsymbol{F}_G$ entre les petites et grandes masses génère un moment de forces gravitationnelles résultant $\boldsymbol{M}_{G,O}$. L'élasticité du fil de torsion vertical génère un couple de forces élastiques $\boldsymbol{F}_e$ qui donne lieu un moment de forces élastiques résultant $\boldsymbol{M}_{e,O}$.

- Moments de forces extérieures : tige

1. Moment de forces gravitationnelles : deux masses

   - Vecteurs position : arrière et avant

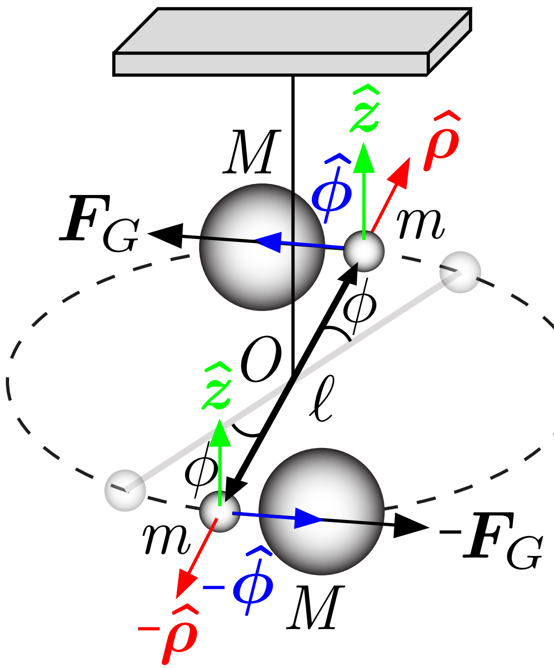
$$\boldsymbol{r} = \frac{\ell}{2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{et} \qquad -\,\boldsymbol{r} = -\,\frac{\ell}{2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

   - Forces de la gravitation : tige $\quad (d \ll \ell)$

$$\boldsymbol{F}_G = \frac{G\,M\,m}{d^2}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{et} \quad -\,\boldsymbol{F}_G = -\,\frac{G\,M\,m}{d^2}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

   - Moment de forces gravitationnelles :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{G,O} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_G + (-\,\boldsymbol{r}) \times (-\,\boldsymbol{F}_G) \\ &= 2\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_G = 2\left(\frac{\ell}{2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) \times \left(\frac{G\,M\,m}{d^2}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \\ &= \frac{G\,M\,m\,\ell}{d^2}\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (A.9.29) \end{aligned}$$



- Moment de forces élastiques : tige ($\phi \ll 1$)

2. Moment de forces élastiques : deux masses

   - Vecteurs déplacement : arrière et avant

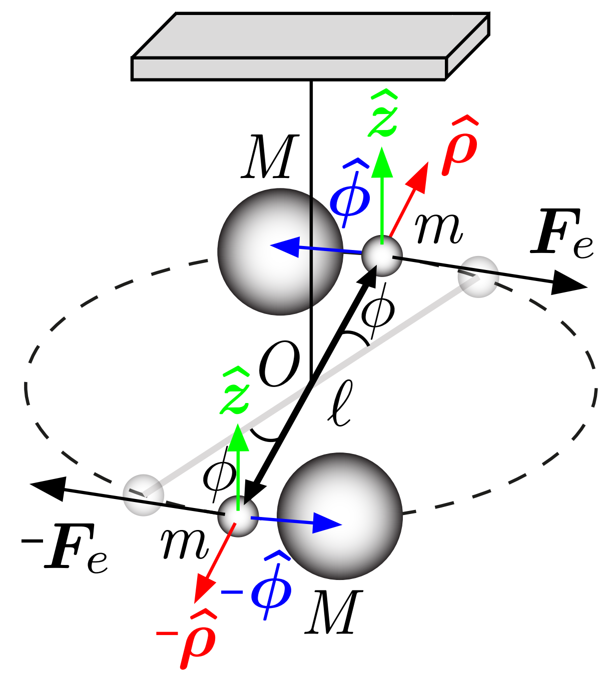
$$\boldsymbol{d} = \frac{\ell}{2}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \text{et} \qquad -\,\boldsymbol{d} = -\,\frac{\ell}{2}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

   - Forces élastiques : tige

$$\boldsymbol{F}_e = -\,k\,\frac{\ell}{2}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{et} \quad -\,\boldsymbol{F}_e = k\,\frac{\ell}{2}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

   - Moment de forces élastiques :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{e,O} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_e + (-\,\boldsymbol{r})\times(-\,\boldsymbol{F}_e)\\ &= 2\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_e = 2\left(\frac{\ell}{2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)\times\left(-\,k\,\frac{\ell}{2}\,\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\\ &= -\,\frac{k\,\ell^2\phi}{2}\,\hat{\boldsymbol{z}} \equiv -\,\kappa\,\phi\,\hat{\boldsymbol{z}} \qquad (A.9.30)\end{aligned}$$



- Equilibre en rotation : tige

$$\sum \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \boldsymbol{M}_{G,O} + \boldsymbol{M}_{e,O} = \boldsymbol{0} \qquad (A.9.31)$$

- Equilibre en rotation : $\phi = \phi_0$

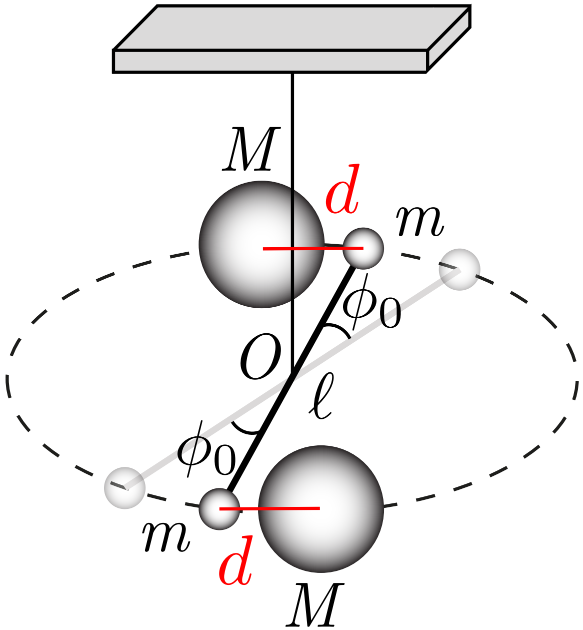
selon $\hat{\boldsymbol{z}}$ :
$$\frac{G\,M\,m\,\ell}{d^2} - \frac{k\,\ell^2\phi_0}{2} = 0 \qquad (A.9.32)$$

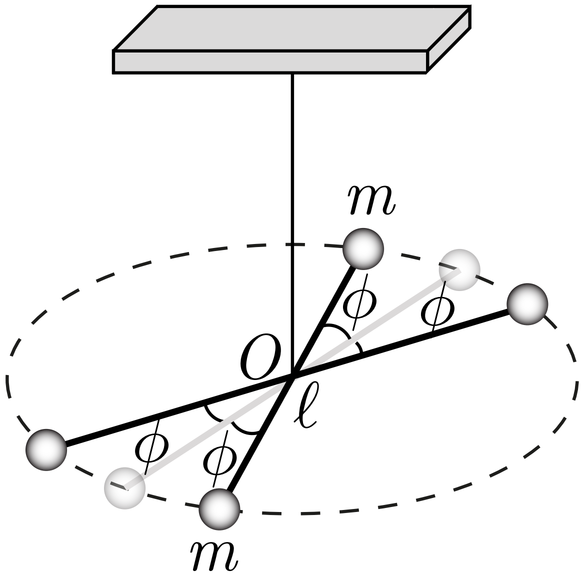
- Constante de la gravitation :

$$G = \frac{k\,\ell\,d^2\phi_0}{2\,M\,m} \qquad (A.9.33)$$

- Pour déterminer la constante élastique $k$, on mesure la période $T$ des petites oscillations des petites masses autour de l'équilibre initial en absence des grandes masses.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\,\ell^2}{2\,\kappa}} \equiv 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad (A.9.34)$$



- Constante de la gravitation :

$$G = \frac{k\,\ell\,d^2\phi_0}{2\,M\,m} \qquad (A.9.33)$$

- Période : oscillations de la tige

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (A.9.34)$$

- Constante de la gravitation :

$$G = \frac{2\,\pi^2\ell\,d^2\phi_0}{M\,T^2} \qquad (A.9.35)$$